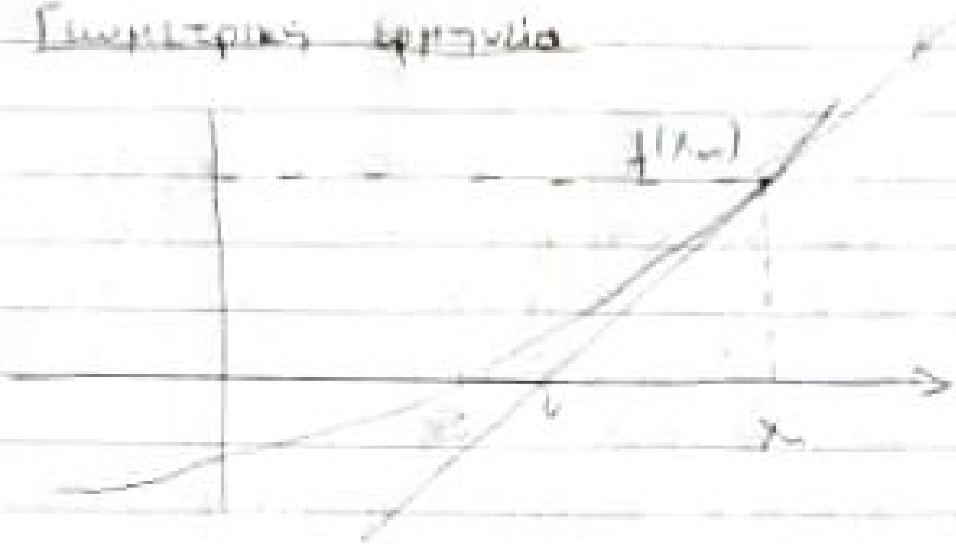
Η μέθοδος του Νεύτωνα

Γεωμετρική ερμηνεία



Έστω x_n η προσέγγιση μιας ρίζας x^* της $f(x)=0$.
Τότε γνωρίζουμε ότι στο x_n: $f'(x_n) \cong \dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}$

(προσοχή δεν πήρα όριο $\Delta x \to 0$)
Ζητάμε

ΔΙΣ $\quad f'(x_n) = \dfrac{-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} \Longrightarrow x_{n+1}-x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Τελικά $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (προφανώς $f'(x_n) \neq 0$)

Είναι μια επαναληπτική μέθοδος με συνάρτηση επανάληψης $(x_{n+1}=\varphi(x_n))$ $\quad \varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Αναλυτικός τρόπος κατασκευής της φ

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$ και θέλω να μετατρέψω την εξίσωση στη μορφή $x=\varphi(x)$ ή $\varphi(x)=x$.

$g'(x) \neq 0$

$$f(x)=0 \iff g(x)f(x)=0 \iff$$
$$\underbrace{g(x)f(x)+x}_{\varphi(x)}=x$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν η $\varphi'(x)=0$ για κάποιο x τότε η μέθοδος συγκλίνει με ταχύτητα μεγαλύτερη του 1. Αντικαθιστώ

$\varphi'(x) = g'f + gf' + 1$ στο $x=x^*$ (ρίζα της $f(x)=0$)

$$\varphi'(x^*) = g'(x^*)f(x^*) + g(x^*)f'(x^*) + 1 = 0 \implies$$
$$f(x^*)=0 \rightarrow 0$$

$$g(x^*)f'(x^*)+1 = 0 \implies g(x^*) = -\frac{1}{f(x^*)}$$

Συνεπώς $\varphi(x) = x - \dfrac{f}{f'}$

Υποθέτουμε ότι η x^* είναι απλή ρίζα της $f(x)=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή της x^*. Τότε έχουμε για την φ'

$$\varphi' = \left(x - \frac{f}{f'}\right)' = 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} = \frac{ff''}{(f')^2}$$

Δηλ. $\varphi'(x^*) = \dfrac{f(x^*)f''(x^*)}{[f(x^*)]^2} = 0$

<u>Θεώρημα</u>: (Τοπική τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου)

Έστω x^* απλή ρίζα της συνάρτησης $f(x)=0$, δηλ. $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$. Επίσης έστω $f(x)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσο το x^* τ.ω. $\forall x_0 \in I$ η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})}$, $n\in\mathbb{N}$

να συγκλίνει στο x^*

Επίσης η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 2 (ακριβώς δύο αν $f''(x^*)\neq 0$), δηλ.

$$\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Γνωρίζουμε ότι $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ και $\varphi'(x^*)=0$

- Αφού η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^* και $\varphi'(x^*)=0$, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω.

$$\max_{x\in I}|\varphi'(x)| = L<1$$

- Πιο ειδικά υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσο το x^* ώστε $\max_{x\in I}|\varphi'(x)|=L<1$

Η φ είναι συστολή στο I! Για $x \in I$ έχουμε
$$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*) \quad [\varphi(x^*) = x^*]$$

Όμως $|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < L|x - x^*| \quad (L<1)$
$$\leq |x - x^*|$$

Δηλαδή $\varphi(x) \in I$ ή $\varphi(x): I \to I$. Συνεπώς από το θεώρημα της συστολής η σύγκλιση της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο x^* έπεται.

Η ταχύτητα σύγκλισης. Από το θεώρημα Taylor έχουμε
$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2!} f''(\xi_1)$$
$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)$$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_1)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)}$$

Συνεπώς
$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_2) - \frac{1}{2} f''(\xi_1)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_2)} \qquad \lim x_n = x^*$$

στο όριο $n \to \infty$

$$\lim \frac{(x_{n+1} - x^*)}{(x_n - x^*)} = \frac{f''(\xi_2) - \frac{1}{2} f''(\xi_1)}{f'(x^*)} \qquad \xi_1 \to x^*, \ \xi_2 \to x^*$$

$$= \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Πρόταση (Ολική σύγκλιση της μεθόδου)

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, τω. $f(a)<0$ και $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ $\forall x \ge 0$. Τότε η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[a,+\infty)$ (απλή ρίζα $f'(\rho) \neq 0$)

Για οποιαδήποτε [redacted] $x_0 \ge a$ η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})}$ συγκλίνει στη ρίζα ρ

Απόδειξη

Μοναδικότητα ρίζας: Προφανής γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα. Ύπαρξη ρίζας: Η f είναι συνεχής και υπάρχουν και αρνητικές της τιμές. Αρκεί νδο για $b>a$ ισχύει $f(b)>0$. Γνωρίζουμε ότι:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \underbrace{\frac{1}{2}(b-a)^2 f''(\xi)}_{>0}$$

(Θεώρημα Taylor) $\Rightarrow$ Αν $f(a)+(b-a)f'(a) > 0$

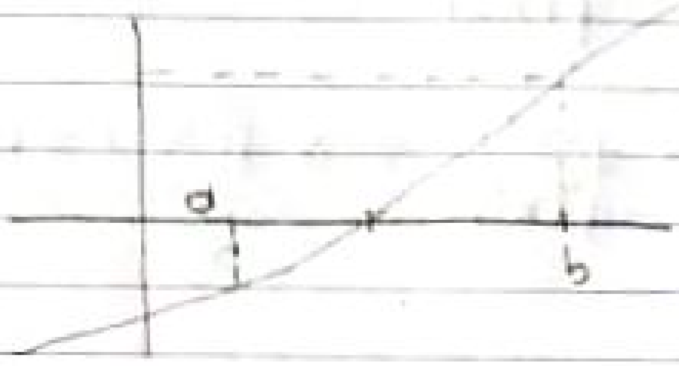
$\Rightarrow f(b) > 0$

Δλδ $f(a)+(b-a)f'(a) > 0 \Rightarrow (b-a)f'(a) > -f(a)$

$$\Rightarrow b > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$\Rightarrow f(b) > 0$$

Συγκλιση $f(x)>0 \Longleftrightarrow x>\rho$
$f(x)<0 \Longleftrightarrow x<\rho$



$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \Longleftrightarrow x_{n+1}-\rho = \varphi(x_n)-\rho =$$
$$= \varphi'(\xi)(x_n-\rho)$$

$$\varphi'(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2}$$

$$\varphi(x_n) = \underbrace{\varphi(\rho)}_{\varphi(\rho)=\rho} + (x_n-\rho)\varphi'(\xi)$$

φ' εξαρτάται απο αυτο της f
(Εξαρτάται από το x_n)

Συνεπως το προσημο της

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_n>\rho \Longrightarrow x_{n+1}>\rho \\ x_n<\rho \Longrightarrow x_{n+1}<\rho \end{cases}$$

$$\forall\ n\geq 1 \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<x_n$$

Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι φθινουσα και φραγμένη κάτω ΔΔδ συγκλίνει το όριο της

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \lim x_{n+1} = \lim\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$

$$\Rightarrow x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow f(x^*) = 0 \quad x^* = \rho$$